

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

У другому розділі викладені основні рівняння і співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл з початковими (залишковими) напруженнями з пружним потенціалом довільної структури, приведені представлення загальних розв'язків просторових задач для випадку однорідного початкового стану.

При викладі матеріалу використовується термінологія, позначення і результати робіт [54, 78, 80, 84].

Усі основні співвідношення приведені в лагранжевих координатах у рамках методу Лагранжа і із залученням відповідної системи координат.

2.1 Лінеаризовані рівняння руху та граничні умови

Лінеаризована теорія пружності для тіл з початковими (залишковими) напруженнями і деформаціями припускає існування трьох станів пружного тіла: природного, початкового деформованого і збуреного.

У природному стані напруження і деформації відсутні. Збурений стан описується величинами, які є сумою величин, що описують початковий стан і збурення. Припускаючи величини збурень малими в порівнянні з відповідними величинами початкового стану, основні співвідношення для третього стану лінеаризуються і з них віднімаються відповідні співвідношення другого(початкового) стану. Отримані таким чином співвідношення і вважаються основними співвідношеннями лінеаризованої теорії пружності.

Така теорія на відміну від класичної лінійної теорії пружності, яка розглядає нескінченно малі деформації відносно природного стану пружного тіла, тобто стану з нульовими початковими напруженнями і деформаціями, більш повно відображає властивості реальних деформованих тіл.

Основи лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими деформаціями детально викладені в роботах [54, 78, 80, 84].

У даному параграфі розглянемо основні співвідношення лінеаризованої теорії для стисливих та нестисливих тіл у разі однорідного початкового стану. Усі величини, що розглядаються нижче, віднесемо до розмірів тіла в початковому (незбуреному) стані.

Використовуємо лагранжеві координати X_i , які в природному стані співпадають з декартовими. В цьому випадку початковий стан визначається переміщеннями

$$u^0_j = \delta_{ij} (\lambda_i - 1) x_i; \quad \lambda_i = \text{const}; \quad i, j = \overline{1,3}; \quad (X_i), \quad (2.1)$$

де λ_i - видовження; δ_{ij} - символ Кронекера. Усі величини, що відносяться до початкового стану, відмічатимемо індексом "нуль".

Тіло вважатимемо ізотропним нелінійно-пружним з довільним потенціалом. У разі ортотропного тіла вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрями співпадають з напрямками координатних ліній $X_i = \text{const}$.

Разом з лагранжевими координатами X_i введемо декартові координати Y_i початкового деформованого стану, які пов'язані з координатами X_i наступними співвідношеннями

$$y_i = \lambda_i x_i; \quad (X_i). \quad (2.2)$$

Представимо усі співвідношення лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями в координатах Y_i .

Надалі введені наступні позначення: Q'_{ij} - складова уздовж осі $O'y_j$ вектору напруження на площині $y_i = \text{const}$ віднесена до одиниці площі перетину $y_i = \text{const}$ у початковому (незбуреному) деформованому стані; Q'_j -

складові вектору напруження на площині з ортом нормалі $\bar{N}^0$; N_i^0 - складова уздовж осі $O'y_j$ орта нормалі $\bar{N}^0$ до поверхні тіла в початковому деформованому стані; ρ' і ρ - щільність матеріалу в початковому деформованому і природному недеформованому станах; V - об'єм тіла в початковому(незбуреному) стані; $S' = S'_1 + S'_2$ - поверхня тіла в початковому (незбуреному) стані; P'_j - складові поверхневого навантаження, що діє на поверхню в деформованому (третьому) стані, але віднесеного до розмірів майданчика в початковому деформованому (другому) стані.

Стисливі тіла. Для стисливих пружних тіл в координатах y_i основні співвідношення мають вигляд [54, 78, 80, 84]:

співвідношення пружності

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}; \quad i, j, \alpha, \beta = \overline{1,3}; \quad ()_{,n} = \frac{\partial}{\partial y_n} (), \quad (2.3)$$

рівняння руху

$$Q'_{ij,i} - \rho' \ddot{u}_j = 0; \quad y_n \in V; \quad (\ddot{ }) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (), \quad (2.4)$$

граничні умови в напруженнях на частині поверхні S_1

$$Q'_{j|S'_1} = P'_j; \quad y_n \in S'_1; \quad Q'_j = N_i^0 Q'_{ij}, \quad (2.5)$$

граничні умови в переміщеннях на частині поверхні S_2

$$u_{j|S'_2} = f'_j; \quad y_n \in S'_2. \quad (2.6)$$

Прийmemo до уваги, що

$$\rho' \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho. \quad (2.7)$$

Тензор ω' відповідно до [54, 78, 80, 84] симетричний, тобто

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \omega'_{\beta\alpha ji}. \quad (2.8)$$

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанту теорії малих початкових деформацій вирази для визначення складових тензора ω' мають вигляд [54, 78, 80, 84]

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \times \\ \times [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} + \lambda_j^{-1} \lambda_\alpha^{-1} \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\beta\beta}]. \quad (2.9)$$

Для другого варіанту теорії малих початкових деформацій компоненти тензора ω' визначаються по формулах

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} \sigma_{\beta\beta}^0]. \quad (2.10)$$

Тут $S_0^{\beta\beta} \equiv \sigma_{\beta\beta}^0$ – компоненти узагальненого напруження в початковому деформованому стані. Формули (2.3) – (2.8) справедливі як для теорії великих (скінченних) початкових деформацій, так і для усіх варіантів теорії малих початкових деформацій. Вирази для обчислення величин $A_{i\beta}$, μ_{ij} і $S_0^{\beta\beta}$ через пружний потенціал для різних постановок задач приведені в роботах [54, 78, 80, 84].

Нестисливі тіла. Основні співвідношення для нестисливих тіл в координатах $\mathcal{U}_i$ зводяться до таких виразів [54, 78, 80, 84]:

співвідношення пружності

$$Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + q'_{ij} p'; \quad y_n \in V, \quad (2.11)$$

рівняння нестисливості

$$q'_{ij} u_{j,i} = 0, \quad (2.12)$$

і співвідношенням (2.4) – (2.6).

Тут

$$q'_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i q_i \quad (2.13)$$

і

$$\rho' = \rho; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (2.14)$$

Тензор κ' має відповідно до [54, 78, 80, 84] властивості симетрії

$$\kappa'_{ij\alpha\beta} = \kappa'_{\beta\alpha ji}. \quad (2.15)$$

Складові тензора κ' для конкретних постановок задач визначаються з виразів (2.9) або (2.10), де $\omega'_{ij\alpha\beta}$ слід замінити на $\kappa'_{ij\alpha\beta}$ з урахуванням другої формули в (2.14). Вирази для обчислення величин $A_{i\beta}$, μ_{ij} , $S_0^{\beta\beta}$ і q_i через пружний потенціал у разі теорії великих (скінченних) початкових деформацій, а також спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій приведені в роботах [54, 78, 80, 84].

Таким чином, основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями для стисливих тіл мають вигляд (2.3) і (2.4), а для нестисливих тіл – (2.11), (2.12) і (2.4).

2.2 Представлення загальних розв'язків просторових задач при однорідних початкових деформаціях

Коротко розглянемо побудову загальних розв'язків відповідних систем рівнянь лінеаризованої динамічної теорії пружності для тіл з початковими напруженнями у випадку однорідного початкового стану, що визначається формулами (2.1). Дослідження виконаємо в лагранжевих координатах Y_n , які в початковому (незбуреному) напружено-деформованому стані співпадають з

декартовими координатами і пов'язані з лагранжевими координатами X_n виразами (2.2).

Стисливі тіла. Лінеаризовані рівняння руху в переміщеннях для пружних стисливих тіл можна отримати після підстановки співвідношень (2.3) в рівняння (2.4). Таким чином, в координатах Y_n рівняння руху в переміщеннях при однорідному початковому стані можна представити у виді

$$L'_{m\alpha} u_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \rho' \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \quad y_n \in V. \quad (2.16)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь в переміщеннях (2.16) можна представити в одній з наступних (відносно індексу j) форм або у вигляді їх лінійної комбінації:

$$u_\alpha^{(j)} = \left[\frac{\partial \det \|L'_{rs}\|}{\partial (L'_{j\alpha})} \right] \Phi'^{(j)}; \quad j, \alpha = \overline{1,3}, \quad (2.17)$$

де функції $\Phi'^{(j)}$ визначаються з рівняння

$$\det \|L'_{rs}\| \Phi'^{(j)} = 0. \quad (2.18)$$

Такий підхід реалізований в роботах [54, 78, 80, 84].

Вважатимемо, що початковий стан забезпечує виконання наступного співвідношення

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (2.19)$$

Загальні розв'язки системи диференціальних рівнянь (2.16) у разі просторових задач за умови (2.19) в декартових координатах можна представити у вигляді

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial y_2} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_3} \chi'; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial y_1} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} \chi';$$

$$u_3 = (\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^{-1} \left(\omega'_{1111} \Delta'_1 + \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho' \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \chi'; \quad (2.20)$$

$$\Delta'_1 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Функції Ψ' і χ' визначаються з наступних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & \left(\Delta'_1 + \xi_1'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \frac{\varrho'}{\omega'_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi' = 0; \\ & \left[\left(\Delta'_1 + \xi_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta'_1 + \xi_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \right. \\ & \left. - \varrho' \left(\frac{\omega'_{1111} + \omega'_{1331}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \Delta'_1 + \frac{\omega'_{3333} + \omega'_{3113}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\varrho'^2}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \right] \chi' = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де

$$\begin{aligned} \xi_1'^2 &= \omega'_{3113} \omega_{1221}'^{-1}; \quad \xi_{2,3}'^2 = c' \pm (c'^2 - \omega'_{3113} \omega'_{3333} \omega_{1331}'^{-1} \omega_{1111}'^{-1})^{\frac{1}{2}}; \\ 2c' \omega'_{1111} \omega_{1331}' &= \omega'_{1331} \omega_{3113}' + \omega'_{1111} \omega_{3333}' - (\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Розглянемо циліндричне тіло з довільним контуром поперечного перерізу. Зв'яжемо з цим циліндричним тілом в початковому напружено-деформованому стані криволінійну циліндричну систему координат. Вісь циліндричного тіла направимо уздовж осі $O'y_3$. Позначимо: N' і S' - нормаль і дотичну до контура поперечного перерізу в площині $y_3 = \text{const}$; $u_{N'}$ і $u_{S'}$ - складові вектору переміщень $\mathbf{u}$ по нормалі і дотичній до контура поперечного перерізу; N'_1 і N'_2 - складові орта нормалі до контура поперечного перерізу відносно декартових координат.

Представлення розв'язків (2.20) в криволінійних циліндричних координатах має вигляд

$$\begin{aligned}
u_{N'} &= \frac{\partial}{\partial S'} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial N' \partial y_3} \chi'; & u_{S'} &= -\frac{\partial}{\partial N'} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial S' \partial y_3} \chi'; \\
u_3 &= (\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^{-1} \left(\omega'_{1111} \Delta'_1 + \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho' \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \chi'.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Складові тензора напруження Q' при $y_3 = \text{const}$ можна представити в наступній формі:

$$\begin{aligned}
Q'_{33} &= \omega'_{1133} \text{div}' \mathbf{u} + (\omega'_{3333} - \omega'_{1133}) \frac{\partial u_3}{\partial y_3}; \\
Q'_{3N'} &= \omega'_{3113} \frac{\partial u_{N'}}{\partial y_3} + \omega'_{1313} \frac{\partial u_3}{\partial N'}; \\
Q'_{3S'} &= \omega'_{3113} \frac{\partial u_{S'}}{\partial y_3} + \omega'_{1313} \frac{\partial u_3}{\partial S'}; \\
\text{div}' \mathbf{u} &= \frac{\partial u_{N'}}{\partial N'} + \frac{\partial u_{S'}}{\partial S'} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \\
&+ u_{N'} \left(\frac{\partial N'_1}{\partial y_1} + \frac{\partial N'_2}{\partial y_2} \right) + u_{S'} \left(-\frac{\partial N'_2}{\partial y_1} + \frac{\partial N'_1}{\partial y_2} \right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Нестисливі тіла. Лінеаризовані рівняння руху в переміщеннях для нестисливих пружних тіл можна отримати після підстановки (2.11) в (2.4) і (2.12). У координатах y_n для нестисливих тіл рівняння руху і умова нестисливості при однорідному початковому стані має вигляд

$$\begin{aligned}
N'_{m\alpha} u_\alpha &= 0; \\
N'_{m\alpha} &= \left(\kappa'_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \rho' \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) (1 - \delta_{\alpha 4}) (1 - \delta_{m 4}) + \\
&+ \delta_{\alpha 4} (1 - \delta_{m 4}) \frac{\partial}{\partial y_m} + \delta_{m 4} (1 - \delta_{\alpha 4}) \frac{\partial}{\partial y_\alpha}; \\
u_4 &\equiv p'; \quad y_n \in V'; \quad m, \alpha = \overline{1, 4}; \quad i, \beta = \overline{1, 3}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Рівняння (2.25) сформульовані відносно переміщень u_1, u_2, u_3 і скалярної функції p' .

По аналогії з (2.17) розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.25) відносно переміщень u_α ($\alpha = \overline{1,4}$) можна представити в одній з наступних форм (відносно індексу j) чи у вигляді їх лінійної комбінації

$$u_\alpha^{(j)} = \left[\frac{\partial \det \|N'_{rs}\|}{\partial (N'_{j\alpha})} \right] \Phi'^{(j)}; \quad j, \alpha = \overline{1,4}. \quad (2.26)$$

У (2.26) функції $\Phi'^{(j)}$ визначаються з одного і того ж рівняння, яке можна представити у виді

$$\det \|N'_{rs}\| \Phi'^{(j)} = 0. \quad (2.27)$$

Для просторових задач для нестисливого ізотропного або трансверсально-ізотропного тіла при виконанні додаткової умови (2.19) загальні розв'язки системи диференціальних рівнянь (2.25) в декартових координатах мають вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial y_2} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_3} \chi'; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial y_1} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} \chi'; \\ u_3 &= \Delta'_1 \chi'; \\ u_4 \equiv p' &= \left[(\kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313}) \Delta' + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho' \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Функції Ψ' і χ' визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} &\left(\Delta'_1 + \xi_1'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \frac{\varrho'}{\kappa'_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi' = 0; \\ &\left[\left(\Delta'_1 + \xi_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta'_1 + \xi_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \frac{\varrho'}{\kappa'_{1331}} \left(\Delta'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \chi' = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

де

$$\begin{aligned}\xi_1'^2 &= \kappa'_{3113} \kappa'_{1221}{}^{-1}; \quad \xi_{2,3}'^2 = c' \pm (c'^2 - \kappa'_{3113} \kappa'_{1331}{}^{-1})^{\frac{1}{2}}; \\ 2c' \kappa'_{1331} &= \kappa'_{3333} + \kappa'_{1111} - 2(\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Представлення розв'язків (2.25) в криволінійних циліндричних координатах має вигляд

$$\begin{aligned}u_{N'} &= \frac{\partial}{\partial S'} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial N' \partial y_3} \chi'; \quad u_{S'} = -\frac{\partial}{\partial N'} \Psi' - \frac{\partial^2}{\partial S' \partial y_3} \chi'; \\ u_3 &= \Delta'_1 \chi'; \\ u_4 \equiv p' &= \left[(\kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313}) \Delta' + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho' \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Складові тензора напруження Q' при $y_3 = \text{const}$ можна представити в наступній формі:

$$\begin{aligned}Q'_{33} &= \kappa'_{1133} \text{div}' \mathbf{u} + (\kappa'_{3333} - \kappa'_{1133}) \frac{\partial u_3}{\partial y_3}; \\ Q'_{3N'} &= \kappa'_{3113} \frac{\partial u_{N'}}{\partial y_3} + \kappa'_{3131} \frac{\partial u_3}{\partial N'}; \\ Q'_{3S'} &= \kappa'_{3113} \frac{\partial u_{S'}}{\partial y_3} + \kappa'_{3131} \frac{\partial u_3}{\partial S'}; \\ \text{div}' \mathbf{u} &= \frac{\partial u_{N'}}{\partial N'} + \frac{\partial u_{S'}}{\partial S'} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \\ &+ u_{N'} \left(\frac{\partial N'_1}{\partial y_1} + \frac{\partial N'_2}{\partial y_2} \right) + u_{S'} \left(-\frac{\partial N'_2}{\partial y_1} + \frac{\partial N'_1}{\partial y_2} \right).\end{aligned}\quad (2.32)$$

Загальні розв'язки (2.20), (2.23), (2.28) і (2.31) дають можливість досліджувати при єдиному підході досить широкі класи задач про поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями та з різною геометричною формою.

Таким чином, в другому розділі коротко викладені основні співвідношення лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл відповідно до теорії скінченних (великих) початкових деформацій і до двох варіантів теорії

малих початкових деформацій в досить загальній формі. Приведені результати являються загальними для різних моделей деформованих тіл.